

# 《点集拓扑》教学大纲

课程编码：1511102002

课程名称：点集拓扑

学时/学分：32/2

先修课程：《数学分析》、《高等代数》

适用专业：数学与应用数学

开课教研室：代数与几何教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质：本课程是数学与应用数学专业的一门专业选修课。

2. 课程任务：通过该课程的学习，学生不仅能学到点集拓扑的基本理论和方法，而且对学习其它数学分支如代数拓扑、泛函分析等也有很大帮助。通过本课程的学习使学生理解和掌握拓扑学的基本思想、基本方法和基本内容，了解从欧氏空间到度量空间再到拓扑空间的认知过程，了解各种拓扑概念的含义和背景，使得学生对于这个近代数学的重要分支有一定的了解，具备更高的数学视野，从而为进一步掌握这个新的数学工具打下一个基础。

## 二、课程教学基本要求

通过本课程的学习，能够使学生较深刻地理解有关拓扑空间、连续映射和连通性等最基本的概念，并牢固掌握点集拓扑学的基本理论和思想方法，同时可以使学生的抽象思维和逻辑思维能力得到很大提高。

成绩考核形式：末考成绩（闭卷考试）（70%）+平时成绩（平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等）（30%）。成绩评定采用百分制，60分为及格。

## 三、课程教学内容

### 第一章 集合

#### 1. 教学基本要求

让学生熟悉朴素集合论的一些基本概念、性质，掌握集合、映射、集族、可数集等概念，为后续章节的学习奠定基础。

#### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

使学生熟悉朴素集合论的基本概念，习惯在后面章节用到的一些常用术语。熟练掌握集合的基本概念以及集合的基本运算，理解关系及等价关系的概念并能正确解决有关问题，深刻理解映射的概念并了解几种特殊映射的意义，掌握可数集、不可数集以及基数的定义，了解集合论中的选择公理。

#### 3. 教学重点和难点

教学重点是集合、关系、映射、可数集等基本概念；教学难点是集族、基数、选择公理。

#### 4. 教学内容

##### ★第一节 集合的基本概念

1. 集合的概念
2. 子集的概念
3. 集合的包含关系

##### ★第二节 集合的基本运算

1. 集合的并、交、差运算的定义
2. 集合运算的运算规律

##### 第三节 关系

1. 关系的定义
2. 关系的性质

##### 第四节 等价关系

1. 等价关系的定义
2. 等价关系的性质

##### 第五节 映射

1. 映射、开映射、满映射的定义
2. 映射的性质

##### 第六节 有标集族及其并和交

1. 有标集族的定义
2. 有标集族的并和交的定义
3. 有标集族的并和交运算的性质

##### 第七节 可数集 不可数集 基数

1. 可数集、不可数集、基数的定义
2. 可数集、不可数集的判定

##### ★第八节 选择公理和 Tukey 引理

1. 选择函数的定义
2. 选择公理

##### ★第九节 集族的笛卡儿积

1. 集族的笛卡儿积的定义
2. 投射的定义

#### 第二章 拓扑空间与连续映射

1. 教学基本要求

使学生掌握拓扑空间和连续映射的基本概念和性质，能够认识到拓扑学的中心任务是研究拓扑不变性质。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

使学生掌握度量、度量空间的概念，尤其深刻理解拓扑、拓扑空间的概念；掌握连续映射的性质，理解同胚映射的定义；理解并掌握拓扑空间的基本概念，这些概念包括开集、邻域、邻域系、凝聚点、导集、闭集及闭包，集合的内部、边界等；掌握基与子基的概念，理解邻域基及邻域子基的定义，掌握基及子基的性质；深刻理解拓扑满足的三个条件，掌握判定给定的空间是否为拓扑空间的基本方法；能够熟练确定集合的导集和闭包，掌握导集和闭包的性质；深刻理解基和子基的概念，掌握并能判定拓扑空间的一个开集族是其一个基的条件以及子基、邻域基和邻域子基的性质。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是拓扑空间、连续映射的概念；教学难点是基、子基、邻域基、邻域子基的概念及判定。

## 4. 教学内容

### 第一节 度量空间与连续映射

1. 度量、度量空间的定义、例子
2. 球形邻域、开集、邻域的定义、性质
3. 度量空间之间的连续映射的定义
4. 映射连续与开集、邻域的关系

### 第二节 拓扑空间与连续映射

1. 拓扑、拓扑空间的定义、例子
2. 可度量化空间的定义
3. 同胚的定义
4. 同胚的性质

### 第三节 邻域与邻域系

1. 邻域、邻域系的定义
2. 邻域系的性质
3. 拓扑空间之间的映射在一点处连续的定义

### 第四节 导集 闭集 闭包

1. 凝聚点、导集的定义
2. 导集的性质
3. 闭集的定义
4. 闭集族的性质
5. 闭包的定义

## 第五节 内部 边界

1. 内点、内部的定义
2. 内部的性质
3. 边界的定义
4. 闭包、内部、边界间的联系

## 第六节 基与子基

1. 基的定义
2. 基的判定条件
3. 子基的定义
4. 子基的判定条件
5. 邻域基、邻域子基的定义

# 第三章 子空间

## 1. 教学基本要求

理解和掌握由已知的拓扑空间构造新的拓扑空间的方法，分别是：子空间，积空间，商空间。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

了解根据已知的拓扑空间构造新的拓扑空间的三种惯用的办法；了解对于拓扑空间中的一个给定的子集，如何按某种“自然的方式”赋予它一个拓扑使之成为一个拓扑空间的方法；给定的两个拓扑空间，了解对于它们的笛卡儿积如何按某种自然的方式给定这个笛卡儿积一个拓扑使之成为拓扑空间的途径；理解商集是在一个集合中给定了一个等价关系之后将相对于这个等价关系而言的等价类构成的集合。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是子空间、积空间的定义；教学难点是商拓扑、商空间的定义。

## 4. 教学内容

### 第一节 子空间

1. 子空间的定义
2. 子空间的性质

### 第二节 积空间（有限情形）

1. （有限）积空间的定义
2. （有限）积空间的性质

### ★第三节 积空间（一般情形）

1. （一般）积空间的定义
2. （一般）积空间的性质

## 第四节 商空间

1. 商拓扑、商空间、商映射的定义
2. 商空间的例子

## 第四章 连通性

### 1. 教学基本要求

掌握连通子集，连通空间的定义及一些简单应用。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

使学生深刻理解拓扑空间的几种拓扑不变性质，包括连通性、局部连通性和弧连通性；能够掌握拓扑空间的拓扑不变性质的简单应用；深刻理解并掌握连通空间与连通子集的概念；能够熟练运用连通性的相关性质解决某些连通性的问题。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是连通空间、连通子集的定义；教学难点是连通空间的性质及空间连通性的证明。

### 4. 教学内容

## 第一节 连通空间

1. 子集隔离的定义
2. 连通空间的定义
3. 连通子集的定义

## 第二节 连通性的某些简单应用

1. 介值定理
2. 不动点定理

说明：带★的内容为选讲内容。

## 四、学时分配表

讲授内容及学时分配

章序	内容	课时	备注
一	朴素集合论	4	
二	拓扑空间与连续映射	14	
三	子空间，积空间，商空间	10	
四	连通性	4	
合计		32	

## 五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《点集拓扑讲义》 主编: 熊金城 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2003 年。

(二) 参考书:

1. 《点集拓扑学》 主编: 徐森林 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2007 年。

2. 《基础拓扑学讲义》 主编: 尤承业 出版社: 北京大学出版社 出版时间: 1997 年。

3. 《拓扑学基础 (第二版)》 主编: 杨金坤 出版社: 科学出版社 出版时间: 2011 年。

执笔: 于云霞

审定: 郭宏旻 梁桂珍